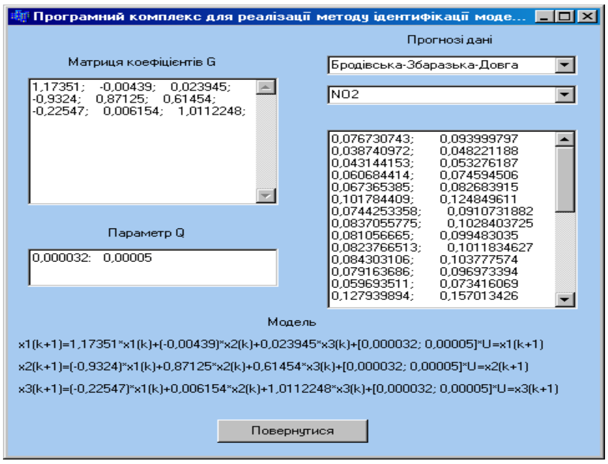

Рисунок 11 - Форма виводу ідентифікованих параметрів моделі

V. Висновки

1. Вперше поставлена та розв'язана задача ідентифікації інтервальної моделі динаміки концентрації шкідливих викидів.

2. Результати моделювання показали, що точність моделювання концентрації шкідливих викидів знаходиться в межах варіації реальних значень, що підтверджує ефективність досліджуваного методу параметричної ідентифікації інтервальних динамічних моделей та програмного забезпечення, розробленого для його реалізації.

Література

1. Лычак М.М. Синтез дискретных адаптивных систем управления на основе теоретико-множественных моделей неопределенности // Дис. докт. физ. – мат. наук.- Киев: Ин- т киб., 1995.
2. Aubin J.-P., Frankowska H. Set-Valued Analysis. - Boston: Birkhauser, 1990.
3. Куссуль Н.Н. Исследование сходимости размытого алгоритма наблюдения для многомерных динамических систем // Проблемы управления и информатики.- 1996. - №4. – С. 54 – 61.
4. Дивак М., Стахів П., Максимова І. Удосконалений метод допустимого оцінювання розв'язку ІСЛАР при ідентифікації параметрів динамічних моделей // Відбір і обробка інформації. – Львів, 2006. – Випуск 26 (102). – С. 27 - 35.

Одержано 12.06.2007 р.

УДК 517.94

Й. Лучко, докт. техн. наук; Р. Пелех

Львівський державний аграрний університет

ДВОСТОРОННІ МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ НЕЛІНІЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

Виведено двосторонні розрахункові формули першого та другого порядку точності розв'язання задачі Коші для звичайних диференціальних рівнянь. Одна з них дає верхнє, а друга – нижнє наближення до точного розв'язку. Наведено функції стійкості запропонованих числових методів.

J. Luchko, R. Pelekh

TWO–SIDE METHODS FOR THE SOLUTION NONLINEAR DIFFERENTIAL EQUATIONS

The two-side formulas of the first and second order of accuracy for the solution of Cauchy problem for ordinary differential equations are constructed. One of them gives upper approximation and the other lower one of exact solution. Their stability functions are found.

Багато прикладних задач, зокрема розрахунок напружено-деформованого стану тонкостінних елементів конструкцій (стержнів, пластин, оболонок), у загальному випадку зводяться до розв'язання нелінійних систем диференціальних рівнянь. Порядок системи диференціальних рівнянь залежить від вибраної моделі. За певних умов навантаження або припущень дану систему можна звести до системи звичайних диференціальних рівнянь першого порядку:

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0, \quad x \in [x_0, x_0 + L], \tag{1}$$

де $y(x)$ – дійсний m – компонентний вектор, f – дійсна векторна функція залежної та незалежної змінних, причому припускається, що функція f володіє необхідною для викладок гладкістю.

При розв'язуванні диференціальних рівнянь важливо, щоб основні властивості розв'язку добре відображались наближеними методами. У прикладній математиці широкого застосування набули дробово-раціональні наближення, які при відповідних умовах дають високу швидкість збіжності алгоритмів, двосторонні і монотонні наближення, мають слабку чутливість до похибок заокруглень, вірно відображають основні властивості розв'язків досліджуваних задач [1-3].

У даній роботі пропонуються двосторонні числові методи розв'язування задачі (1). Не обмежуючи загальності, будемо знаходити наближені розв'язки задачі (1) у скалярному випадку, оскільки на системи рівнянь вони переносяться покомпонентно.

Характерною особливістю таких алгоритмів є те, що при певних значеннях відповідних параметрів можна отримати як нові, так і традиційні однокрокові методи розв'язання задачі (1).

Запропоновані обчислювальні схеми дають можливість на кожному кроці отримувати не тільки наближений розв'язок, але і оцінку похибки результату.

Ці двосторонні формули будуються так, щоб локальні похибки схеми в кожній вузловій точці мали вигляд:

$$\left| y(x_{n+1}) - y_n \right| = \omega h^p KF(f) + O(h^{p+1})_1,$$

де $y(x_{n+1})$ і y_{n+1} - відповідно точний і наближений розв'язок задачі (1), h- крок інтегрування, $F(f)$ – деякий диференціальний оператор, обчислений в точці (x_n, y_n), K – константа, p – порядок точності, ω - параметр двосторонності.

За допомогою параметрів ω і h досягається двосторонність і необхідна точність на всьому інтервалі інтегрування.

Зауважимо, що у запропонованих обчислювальних формулах без додаткових звертань до правої частини диференціального рівняння можна оцінити значення $F(f)$, що вигідно відрізняє ці схеми від традиційних двосторонніх алгоритмів [4, 6, 7].

Для побудови двосторонніх методів типу Рунге-Кутта різних порядків точності шукаємо наближений розв'язок задачі (1) у вигляді ланцюгового дробу [3, 5]:

$$y_{n+1}^{[k,l]} = {y_n}/{D_n}, \tag{2}$$

де

$$D_n = \sum_{i=0}^{k-1} d_{i,0} + \cfrac{d_{k,0}}{1 + \cfrac{d_{k,1}}{1 + \ddots + \cfrac{d_{k,l-1}}{1 + d_{k,l}}}}.$$

Вирази для $d_{k,l}$ у випадку $k + l = \overline{1,4}$ $(k = \overline{1,4};\ l = \overline{0,3})$ мають вигляд:

$$d_{0,0} = 1, \ d_{i,0} = -\sum_{m=1}^{i} d_{i-m,0} \cdot \frac{\sigma_m}{y_n}, \ i = \overline{1,4}, \tag{3}$$

$$d_{\nu,1} = -\frac{d_{\nu+1,0}}{d_{\nu,0}},\ \nu = \overline{1,3},\ d_{\mu,2} = d_{\mu+1,1} - d_{\mu,1},\ \mu = 1,2,$$

$$d_{1,3} = d_{1,2}\frac{d_{2,2}}{d_{1,2}},\ \sigma_m = h\sum_{i=1}^{q} a_{mi}k_i,\ q = k + l,$$

$$k_i = f(x_n + \alpha_i h,\ y_n + h\sum_{j=1}^{q}\beta_{ij}k_j),\ \alpha_i = \sum_{j=1}^{q}\beta_{ij},\ y_n \neq 0.$$

Тут h - крок інтегрування ($h = x_{n+1} - x_n,\ n = 0,1,2,...$), a_{ij}, α_i β_{ij} - параметри.

Для отримання двосторонніх обчислювальних формул першого порядку точності розглянемо формули (2), (3) при k=2, l=0 і k=1, l=1:

$$y_{n+1}^{[2,0]} = \frac{y_n}{1 + d_{1,0} + d_{2,0}} = \frac{P_{[2,0]}}{Q_{[2,0]}}, \tag{4}$$

де $d_{1,0} = -hk_1/y_n$, $d_{2,0} = \left\{h^2k_1^2 - y_n\left(a_{21}k_1 + a_{22}k_2\right)h\right\}/y_n^2$ і

$$y_{n+1}^{[1,1]} = \frac{y_n}{1 + \frac{d_{1,0}}{1 + d_{1,1}}}, \tag{5}$$

$$d_{1,1} = \frac{hk_1^2 - y_n\left(a_{21}k_1 + a_{22}k_2\right)}{y_n k_1},\ k_1 = f\left(x_n, y_n\right),$$

$$k_2 = f\left(x_n + \alpha_2 h,\ y_n + \beta_{21}hk_1\right).$$

Розвинувши k_2 в ряд Тейлора і провівши відповідні обчислення, знайдемо:

$$\begin{aligned}Q_{[2,0]} = &\Big\{y_n^2 - h\left(1 + a_{21} + a_{22}\right)y_n f + \\ &+ h^2\left(f^2 - a_{22}\alpha_2 y_n\frac{\partial f}{\partial x} - a_{22}\beta_{21}y_n f\frac{\partial f}{\partial y}\right) - h^3 a_{22}y_n\left(\alpha_2^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \right.\\ &\left.+ 2\alpha_2\beta_{21}f\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} + \beta_{21}^2 f^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right) - \frac{1}{6}h^4 a_{22}y_n\left(\alpha_2^3\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} + 3\alpha_2^3\beta_{21}\times\right.\\ &\left.\times f\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y} + 3\alpha_2\beta_{21}^2 f^2\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y^2} + \beta_{21}^2 f^3\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}\right) + O\left(h^5\right)\Big\}.\end{aligned}$$

Обчислимо різницю

$$\begin{aligned}y\left(x_{n+1}\right)Q_{[2,0]} - P_{[2,0]} = &-hfy_n^2\left(a_{21} + a_{22}\right) + h^2y_n^2\left[\left(\frac{1}{2} - a_{22}\alpha_2\right)\frac{\partial f}{\partial x} + \right.\\ &\left.+\left(\frac{1}{2} - a_{22}\beta_{21}\right)f\frac{\partial f}{\partial y}\right] - h^2y_n f^2\left(a_{21} + a_{22}\right) + h^3\left\{y_n^2\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\frac{1}{6} - a_{22}\alpha_2^2\right) + \right.\right.\\ &\left.+ 2f\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\left(\frac{1}{6} - a_{22}\alpha_2\beta_{21}\right) + f^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\frac{1}{6} - a_{22}\beta_{21}^2\right)\right] + \frac{1}{6}y_n^2 f\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \right.\\ &\left.\left.+ f\frac{\partial f}{\partial y}\right) - y_n f\left[\frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{1}{2} + a_{22}\alpha_2\right) + f\frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{1}{2} + a_{22}\beta_{21}\right)\right] + f^3\right\} + O\left(h^4\right).\end{aligned}$$

Прирівнявши до нуля коефіцієнт при h, тобто $a_{21} + a_{22} = 0,$ отримаємо

$$y\left(x_{n+1}\right)Q_{[2,0]} - P_{[2,0]} = h^2y_n^2\left\{\left(\frac{1}{2} - a_{22}\alpha_2\right)\frac{\partial f}{\partial x} + \left(\frac{1}{2} - a_{22}\beta_{21}\right)\frac{\partial f}{\partial y}\right\} + O\left(h^3\right),$$

де

$$Q_{[2,0]} = y_n^2 - hfy_n + h^2\left[f^2 - a_{22}y_n\left(\alpha_2\frac{\partial f}{\partial x} + \beta_{21}f\frac{\partial f}{\partial y}\right)\right] + O\left(h^3\right).$$

1. Нехай $\alpha_2 \neq \beta_{21},\ a_{22}\alpha_2 = \frac{1}{2}$.

Поклавши $\omega = \frac{1}{2} - a_{22}\beta_{21}$, отримаємо систему

$$\begin{cases} a_{21} + a_{22} = 0 \\ a_{22}\alpha_2 = \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} - a_{22}\beta_{21} = \omega, \end{cases}$$

розв'язок якої має вигляд:

$$a_{21} = -\frac{1}{2\alpha_2},\quad a_{22} = \frac{1}{2\alpha_2},\quad \beta_{21} = (1-2\omega)\alpha_2,$$

де α_2 – довільне відмінне від нуля число.

2. Нехай $\alpha_2 \neq \beta_{21},\ a_{22}\beta_{21} = \frac{1}{2}$. Тоді з рівнянь

$$a_{21} + a_{22} = 0,\quad a_{22}\beta_{21} = \frac{1}{2},\quad \frac{1}{2} - a_{22}\alpha_2 = \omega$$

знайдемо

$$a_{21} = -a_{22},\quad \beta_{21} = \frac{1}{2a_{22}},\quad a_{22} = \frac{1-2\omega}{2\alpha_2},\quad \left(\alpha_2 \neq 0,\ \omega \neq \frac{1}{2}\right).$$

3. Нехай $\alpha_2 = \beta_{21}$. Позначивши $\omega = \frac{1}{2} - a_{22}\alpha_2$, одержимо систему з двох рівнянь

$$\begin{cases} a_{21} + a_{22} = 0 \\ \frac{1}{2} - a_{22}\alpha_2 = \omega, \end{cases}$$

з якої знайдемо

$$a_{21} = -a_{22},\ a_{22} = \frac{1-2\omega}{2\alpha_2},\ \beta_{21} = \alpha_2, \tag{6}$$

де α_2 – відмінне від нуля число.

Функція стійкості [8] формули (4) при значеннях параметрів з (6) має вигляд:

$$S_{[2,0]}(\lambda h) = \frac{1}{1 - \lambda h + \left(\frac{1}{2} + \omega\right)(\lambda h)^2},\quad |\omega| < \frac{1}{2},$$

а головний член похибки

$$F^{[2,0]} = \omega\left(\frac{\partial f}{\partial x} + f\frac{\partial f}{\partial y}\right)h^2 = \omega h^2 Df \cong \omega h(k_2 - k_1)\tilde{a}_{22};\quad \left(\tilde{a}_{22} = \frac{1}{\alpha_2}\right),$$

тобто для оцінки головного члена похибки $F^{[2,0]}$ не потрібно робити додаткові обчислення правої частини диференціального рівняння (1), оскільки $F^{[2,0]}$ виражається через вже знайдені значення k_1 і k_2.

Розглянемо формулу (5):

$$y_{n+1}^{[1,1]} = \frac{y_n}{1 - \dfrac{h\dfrac{k_1}{y_n}}{1 + \dfrac{hk_1^2 - (a_{21}k_1 + a_{22}k_2)y_n}{y_n k_1}}} =$$

$$= \frac{y_n\left[(1-a_{21})k_1 - a_{22}k_2\right] + hk_1^2}{(1-a_{21})k_1 - a_{22}k_2} = y_n + \frac{P_{[1,1]}}{Q_{[1,1]}}$$

$$P_{[1,1]} = hk_1^2, \quad Q_{[1,1]} = (1-a_{21})k_1 - a_{22}k_2 .$$

Враховуючи, що

$$Q_{[1,1]} = (1 - a_{21} - a_{22})f - ha_{22}\left(\alpha_2 \frac{\partial f}{\partial x} + \beta_{21} f \frac{\partial f}{\partial y}\right) -$$

$$-\frac{1}{2}h^2 a_{22}\left(\alpha_2^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2\alpha_2\beta_{21} f \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \beta_{21}^2 f^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right) -$$

$$-\frac{1}{6}h^3 a_{22}\left(\alpha_2^3 \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} + 3\alpha_2^2\beta_{21} f \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} + 3\alpha_2\beta_{21}^2 f^2 \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} + \beta_{21}^3 f^3 \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}\right) + O(h^4),$$

отримаємо

$$y(x_{n+1}) - y_{n+1}^{[1,1]} = \left[-h(a_{21} + a_{22})f + h^2\left\{\left[\frac{1}{2}(1 - a_{21} - a_{22}) - a_{22}\alpha_2\right] f \frac{\partial f}{\partial x} + \right.\right.$$

$$\left. + \left[\frac{1}{2}(1 - a_{21} - a_{22}) - a_{22}\beta_{21}\right] f^2 \frac{\partial f}{\partial x}\right\} + h^3\left\{\left[\frac{1}{6}(1 - a_{21} - a_{22}) - \right.\right.$$

$$\left. - a_{22}\frac{\alpha_2^2}{2}\right] f \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \left[\frac{1}{6}(1 - a_{21} - a_{22}) - a_{22}\frac{\alpha_2}{2}\beta_{21}\right] \cdot 2 f^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} +$$

$$+ \left[\frac{1}{6}(1 - a_{21} - a_{22}) - a_{22}\frac{\beta_{21}^2}{2}\right] f^3 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{1}{6}(1 - a_{21} - a_{22})\left(\frac{\partial f}{\partial x} + f\frac{\partial f}{\partial y}\right) \times$$

$$\left.\left. \times f \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{1}{2}a_{22}\left(\alpha_2 \frac{\partial f}{\partial x} + \beta_{21} f \frac{\partial f}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial f}{\partial x} + f \frac{\partial f}{\partial y}\right)\right\} + O(h^4)\right] \Big/ Q_{[1,1]} .$$

Поклавши $a_{21} + a_{22} = 0,$ маємо

$$R^{[1,1]} = \left\{\left[\left(\frac{1}{2} - a_{22}\alpha_2\right) f \frac{\partial f}{\partial x} + \left(\frac{1}{2} - a_{22}\beta_{21}\right) f^2 \frac{\partial f}{\partial y}\right] h^2 + O(h^3)\right\} \Big/ Q_{[1,1]},$$

$$Q_{[1,1]} = f - ha_{22}\left(\alpha_2 \frac{\partial f}{\partial x} + \beta_{21} f \frac{\partial f}{\partial y}\right) + O(h^2).$$

Легко бачити, що, поклавши $\alpha_2 = \beta_{21}$ і позначивши $\frac{1}{2} - a_{22}\alpha_2 = \omega,$ значення коефіцієнтів $a_{21}, a_{22}, \alpha_2, \beta_{21}$ визначаються формулами (6).

Побудуємо двосторонні обчислювальні формули другого порядку точності. Розглянемо формули (2) – (3) при $k = 3, \ l = 0.$ Поклавши

$$\alpha_i = \sum_{j=1}^{i-1} \beta_{ij} \quad (i = 1,2,3), \quad a_{11} = 1, \quad a_{12} = a_{13} = a_{23} = 0 ,$$

одержимо наступні вирази для коефіцієнтів при $h^i \quad \left(i = \overline{1,3}\right):$

$$
\begin{array}{ll}
hf \cdot y_n^3 : & -a_{21}-a_{22}-a_{31}-a_{32}-a_{33} \\
h^2 y_n^3 \cdot Df : & \frac{1}{2}-(a_{22}+a_{32})\alpha_2-a_{33}\alpha_3 \\
h^2 y_n^2 f^2 : & (a_{21}+a_{22})-a_{31}-a_{32}-a_{33} \\
h^3 y_n^3 \cdot D^2 f : & \frac{1}{6}-(a_{22}+a_{32})\frac{\alpha_2^2}{2}-a_{33}\frac{\alpha_3^2}{2} \\
h^3 y_n^3 \cdot f \cdot Df : & 2a_{22}\alpha_2-\frac{1}{2}(a_{21}+a_{22}+a_{31}+a_{32}+a_{33}+1)- \\
 & -(a_{22}+a_{32})\alpha_2-a_{33}\alpha_3 \\
h^3 y_n^3 \frac{\partial f}{\partial y} \cdot Df : & \frac{1}{6}-a_{33}\beta_{32}\alpha_2 \\
h^3 y_n \cdot f^3 : & 2(a_{21}+a_{22}).
\end{array} \tag{7}
$$

Позначимо

$$\frac{1}{6}-(a_{22}+a_{32})\frac{\alpha_2^2}{2}-a_{33}\frac{\alpha_3^2}{2}=\omega_1, \quad \frac{1}{6}-a_{33}\beta_{32}\alpha_2=\omega_2$$

і прирівняємо до нуля всі решта коефіцієнти при степенях h, h^2 і h^3. Тоді з рівнянь

$$a_{21}+a_{22}+a_{31}+a_{32}+a_{33}=0,$$
$$a_{21}+a_{22}-a_{31}-a_{32}-a_{33}=0,$$
$$2(a_{21}+a_{22})=0$$

слідує, що $a_{21}+a_{22}=0$, $a_{31}+a_{32}+a_{33}=0$ і, враховуючи це, з рівнянь

$$\frac{1}{2}-(a_{22}+a_{32})\alpha_2-a_{33}\alpha_3=0,$$

$$2a_{22}\alpha_2-\frac{1}{2}-(a_{22}+a_{32})\alpha_2-a_{33}\alpha_3=0$$

отримаємо

$$a_{22}\alpha_2=\frac{1}{2}, \quad a_{32}\alpha_2+a_{33}\alpha_3=0.$$

В результаті маємо наступну систему алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{cases} a_{21}+a_{22}=0, \quad a_{31}+a_{32}+a_{33}=0, \\ a_{22}\alpha_2=\frac{1}{2}, \quad a_{32}\alpha_2+a_{33}\alpha_3=0, \\ \frac{1}{6}-(a_{22}+a_{32})\frac{\alpha_2^2}{2}-a_{33}\frac{\alpha_3^2}{2}=\omega_1, \ \frac{1}{6}-a_{33}\alpha_2\beta_{32}=\omega_2. \end{cases} \tag{8}$$

В цьому випадку

$$R^{[3,0]}=\left\{h^3 y_n^3\left(\omega_1 D^2 f+\omega_2\frac{\partial f}{\partial y}Df\right)+O(h^4)\right\}\Big/Q_{[3,0]},$$

де

$$Q_{[3,0]}=y_n^3-hfy_n^2+h^2 y_n\left(f^2-\frac{1}{2}y_n Df\right)+O(h^3).$$

Система (8) має три множини розв’язків. Перша з них:

$$a_{21} = -\frac{1}{2\alpha_2},\ a_{22} = \frac{1}{2\alpha_2},\ a_{31} = \frac{2 - 3\alpha_2 - 12\omega_1}{6\alpha_2\alpha_3},$$
$$a_{32} = \frac{3\alpha_2 - 2 + 12\omega_1}{6\alpha_2(\alpha_3 - \alpha_2)},\ a_{33} = \frac{2 - 3\alpha_2 - 12\omega_1}{6\alpha_3(\alpha_3 - \alpha_2)}, \tag{9}$$
$$\beta_{21} = \alpha_2,\quad \beta_{32} = \frac{\alpha_3}{\alpha_2} \cdot \frac{(\alpha_3 - \alpha_2)(1 - 6\omega_2)}{(2 - 3\alpha_2 - 12\omega_1)},\ \ \beta_{31} = \alpha_3 - \beta_{32},$$

де α_2, α_3 – параметри, що задовольняють співвідношення

$$\alpha_2 \cdot \alpha_3(\alpha_3 - \alpha_2)(2 - 3\alpha_2 - 12\omega_1) \neq 0;$$

і тоді

$$F^{[3,0]} = \omega_1 D^2 f + \omega_2 \frac{\partial f}{\partial y} Df.$$

Запишемо вирази для коефіцієнтів $a_{mi}, \alpha_i, \beta_{ij}$ $(a_{11} = 1)$ у випадку якщо

1. $\omega_1 = \omega_2 = \omega;$ 2. $\omega_1 \neq 0,\ \omega_2 = 0;$ 3. $\omega_1 = 0,\ \omega_2 \neq 0$.

1. $\omega_1 = \omega_2 = \omega:$

$\begin{array}{c} 0 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{array}$	$\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ \alpha_2 & 0 & 0 \\ \alpha_3 - \beta_{32} & \beta_{32} & 0 \end{array}$	$\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2\alpha_2} & \frac{1}{2\alpha_2} & 0 \\ \frac{2 - 3\alpha_3 - 12\omega}{6\alpha_2\alpha_3} & \frac{12\omega - 2 + 3\alpha_2}{6\alpha_2(\alpha_3 - \alpha_2)} & \frac{2 - 3\alpha_2 - 12\omega}{6\alpha_3(\alpha_3 - \alpha_2)} \end{array}$

$$\beta_{32} = \frac{(1 - 6\omega)\alpha_3(\alpha_3 - \alpha_2)}{\alpha_2(2 - 3\alpha_2 - 12\omega)}.$$

2. $\omega_1 \neq 0,\ \omega_2 = 0:$

$\begin{array}{c} 0 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{array}$	$\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ \alpha_2 & 0 & 0 \\ \alpha_3 - \beta_{32} & \beta_{32} & 0 \end{array}$	$\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2\alpha_2} & \frac{1}{2\alpha_2} & 0 \\ \frac{2 - 3\alpha_2 - 12\omega_1}{6\alpha_2\alpha_3} & \frac{3\alpha_2 - 2 + 12\omega_1}{6\alpha_2(\alpha_3 - \alpha_2)} & \frac{2 - 3\alpha_2 - 12\omega_1}{6\alpha_3(\alpha_3 - \alpha_2)} \end{array}$

$$\beta_{32} = \frac{\alpha_3}{\alpha_2} \cdot \frac{\alpha_3 - \alpha_2}{2 - 3\alpha_2 - 12\omega_1},\ \ \alpha_2 \cdot \alpha_3(\alpha_3 - \alpha_2) \cdot (2 - 3\alpha_2 - 12\omega_1) \neq 0.$$

3. $\omega_1 = 0,\ \omega_2 \neq 0:$

	$\begin{array}{cc} 0 & \\ \alpha_2 & \\ \alpha_3 - \beta_{32} & \beta \end{array}$	$\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2\alpha_2} & \frac{1}{2\alpha_2} & 0 \\ \frac{2 - 3\alpha_2}{6\alpha_2\alpha_3} & \frac{3\alpha_2 - 2}{6\alpha_2(\alpha_3 - \alpha_2)} & \frac{2 - 3\alpha_2}{6\alpha_3(\alpha_3 - \alpha_2)} \end{array}$

$$\beta_{32} = \frac{\alpha_3}{\alpha_2} \cdot \frac{(\alpha_3 - \alpha_2)(1 - 6\omega_2)}{2 - 3\alpha_2},\ \ (\alpha_3 - \alpha_2) \cdot \alpha_2 \cdot \alpha_3(2 - 3\alpha_2) \neq 0.$$

Друге сімейство коефіцієнтів визначається з умов $\alpha_2 = \alpha_3$:

$$\alpha_2 = \alpha_3 = \frac{2}{3}(1 - 6\omega_1),\ \beta_{21} = \alpha_2,\ \beta_{21} = \frac{1 - 6\omega_2}{4(1 - 6\omega_1)a_{33}},$$
$$\beta_{31} = \alpha_2 - \beta_{32},\ a_{11} = 1,\ a_{21} = \frac{3}{4(6\omega_1 - 1)},\ a_{22} = \frac{3}{4(1 - 6\omega_1)}, \tag{10}$$
$$a_{31} = 0,\ a_{32} = -a_{33},$$ де a_{33} – довільне відмінне від нуля число.

В залежності від ω_1 і ω_2 маємо

A. $\omega_1 = \omega_2 = \omega$

	$\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ \alpha_2 & 0 \\ \alpha_2 - \frac{1}{4a_{33}} & \frac{1}{4a} \end{array}$	$\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2\alpha_2} & \frac{1}{2\alpha_2} & 0 \\ 0 & -a_{33} & a_{33} \end{array}$

$\alpha_2 = \frac{2}{3}(1 - 6\omega), \quad 1 - 6\omega \neq 0$

B. $\omega_1 \neq 0,\ \omega_2 = 0$

	$\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ \alpha_2 & 0 \\ \alpha_2 - \beta_{32} & \beta_{32} \end{array}$	$\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{4(1-6\omega_1)} & \frac{3}{4(1-6\omega_1)} & 0 \\ 0 & -a_{33} & a_{33} \end{array}$

$\alpha_2 = \frac{2}{3}(1 - 6\omega_1), \quad \beta_{32} = \frac{1}{4a_{33}(1 - 6\omega_1)} \quad 1 - 6\omega_1 \neq 0,$

a_{33} – довільний відмінний від нуля параметр.

C. $\omega_1 = 0,\ \omega_2 \neq 0.$

	$\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{2}{3} - \beta_{32} & \beta_{32} \end{array}$	$\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{4} & \frac{3}{4} & 0 \\ 0 & -a_{33} & a_{33} \end{array}$

$\beta_{32} = \frac{1 - 6\omega_2}{4a_{33}}, \quad a_{33} \neq 0$ – параметр.

Третє сімейство описується таблицею:

	$\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{6\omega_2 - 1}{4a_{33}} & \frac{1-6}{4a_{3}} \end{array}$	$\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{4} & \frac{3}{4} & 0 \\ -a_{33} & 0 & a_{33} \end{array}$

Провівши необхідні обчислення, знайдемо, що функція стійкості для всіх трьох наборів коефіцієнтів однакова:

$$S_{[3,0]}(\lambda h) = \frac{1}{1 - \lambda h + \frac{1}{2}(\lambda h)^2 - \left(\frac{1}{6} - \omega\right)(\lambda h)^3}. \tag{11}$$

Позначивши у співвідношеннях (7)

$$2a_{22}\alpha_2 - \frac{1}{2}(1 + a_{21} + a_{22} + a_{31} + a_{32} + a_{33}) - (a_{22} + a_{32})\alpha_2 - a_{33}\alpha_3 = \omega$$

і прирівнявши до нуля всі решту коефіцієнтів при степенях h^i $(i = 1,2,3)$, отримаємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} a_{21}+a_{22}=0, \ a_{31}+a_{32}+a_{33}=0, \\ 2a_{22}\alpha_2 = 1+\omega, \ (a_{22}+a_{32})\alpha_2 + a_{33}\alpha_3 = \dfrac{1}{2}, \\ (a_{22}+a_{32})\dfrac{\alpha_2^2}{2} + a_{33}\dfrac{\alpha_3^2}{2} = \dfrac{1}{6}, \ a_{33}\beta_{32}\alpha_2 = \dfrac{1}{6}, \end{cases} \tag{12}$$

розв'язок якої має вигляд:

$$\begin{gathered} a_{21} = -\frac{1+\omega}{2\alpha_2}, \ a_{22} = \frac{1+\omega}{2\alpha_2}, \ a_{31} = \frac{2+3(\omega\alpha_3-\alpha_2)}{6\alpha_2\alpha_3}, \\ a_{32} = \frac{3\alpha_2 - 2 - 3\omega(\alpha_3-\alpha_2)}{6\alpha_2(\alpha_3-\alpha_2)}, \ a_{33} = \frac{2-3\alpha_2}{6\alpha_3(\alpha_3-\alpha_2)}, \\ \beta_{21}=\alpha_2, \quad \beta_{32} = \frac{\alpha_3}{\alpha_2}\cdot\frac{\alpha_3-\alpha_2}{2-3\alpha_2}, \quad \beta_{31} = \alpha_3 - \beta_{32}, \end{gathered} \tag{13}$$

причому

$$\alpha_2 \cdot \alpha_3(\alpha_3-\alpha_2)(2-3\alpha_2) \neq 0.$$

Локальна похибка має вигляд:

$$R^{[3,0]} = \left\{\omega h^3 y_n^2 fDf + O(h^4)\right\}/Q_{[3,0]}, \tag{14}$$

де $Q_{[3,0]} = y_n^3 - hfy_n^2 + h^2\left[(1+\omega\alpha_2)y_n f^2 - \frac{1}{2}y_n^2 Df\right] + O(h^3)$, а функція стійкості

$$S(\lambda h) = \frac{1}{1-\lambda h + \frac{1}{2}(\lambda h)^2 - \left(\frac{1}{6}-\omega\right)(\lambda h)^3}. \tag{15}$$

При $\alpha_2 = \alpha_3$ отримаємо наступний розв'язок системи

$$\begin{gathered} a_{21} = -\frac{3}{4}(1+\omega), \ a_{22} = \frac{3}{4}(1+\omega), \ a_{31} = \frac{3}{4}\omega, \ a_{32} = -\frac{3}{4}\omega - a_{33}, \\ \alpha_2 = \alpha_3 = \frac{2}{3}, \ \beta_{21} = \frac{2}{3}, \ \beta_{31} = \frac{2}{3} - \frac{1}{4a_{33}}, \ \beta_{32} = \frac{1}{4a_{33}}, \end{gathered} \tag{16}$$

де a_{33} – довільне відмінне від нуля число; а при $\alpha_2 = \dfrac{2}{3}$ розв'язок системи має вигляд

$$\begin{gathered} a_{21} = -\frac{3}{4}(1+\omega), \ a_{22} = \frac{3}{4}(1+\omega), \ a_{31} = -\frac{3}{4} - a_{33}, \\ a_{32} = -\frac{3}{4}\omega, \ \alpha_2 = \frac{2}{3}, \ \alpha_3 = 0, \ \beta_{21} = \frac{2}{3}, \\ \beta_{31} = -\frac{1}{4a_{33}}, \quad \beta_{32} = \frac{1}{4a_{33}}, \ a_{33} - \text{параметр } (a_{33} \neq 0). \end{gathered} \tag{17}$$

Позначивши у співвідношеннях (7) коефіцієнти при $h^2 y_n^2 \cdot f^2$ і $h^3 y_n f^3$ через ω, а всі інші прирівнявши до нуля, отримаємо наступну систему рівнянь:

$$\begin{cases} a_{21}+a_{22} = \dfrac{\omega}{2}, \ a_{31}+a_{32}+a_{33} = -\dfrac{\omega}{2}, \\ a_{22}\alpha_2 = \dfrac{1}{2}, \ a_{32}\alpha_2 + a_{33}\alpha_3 = 0, \\ (a_{22}+a_{32})\alpha_2^2 + a_{33}\alpha_3^2 = \dfrac{1}{3}, \ a_{33}\beta_{32}\alpha_2 = \dfrac{1}{6}. \end{cases} \tag{18}$$

Ця система також має три сімейства розв'язків:

$$\text{а). } a_{21}=\frac{1}{2}\left(\omega-\frac{1}{\alpha_2}\right),\ a_{22}=\frac{1}{2\alpha_2},\ a_{31}=-\frac{\omega}{2}+\frac{2-3\alpha_2}{6\alpha_2\alpha_3},$$

$$a_{32}=\frac{3\alpha_2-2}{6\alpha_2(\alpha_3-\alpha_2)},\ a_{33}=\frac{2-3\alpha_2}{6\alpha_3(\alpha_3-\alpha_2)}, \tag{19}$$

$$\beta_{32}=\frac{\alpha_3}{\alpha_2}\cdot\frac{\alpha_3-\alpha_2}{2-3\alpha_2},\ \beta_{31}=\alpha_3-\beta_{32},\ \beta_{21}=\alpha_2$$

$$(\alpha_3-\alpha_2)\alpha_2\cdot\alpha_3\cdot(2-3\alpha_2)\neq 0$$

$$\text{б). } a_{21}=\frac{\omega}{2}-\frac{3}{4},\ a_{22}=\frac{3}{4},\ a_{31}=-\frac{\omega}{2},$$

$$a_{32}=-a_{33},\ \alpha_2=\alpha_3=\beta_{21}=\frac{2}{3}, \tag{20}$$

$$\beta_{31}=\frac{2}{3}-\frac{1}{4a_{33}},\ \beta_{32}=\frac{1}{4a_{33}},\ a_{33}\neq 0$$

$$\text{в). } a_{21}=\frac{2\omega-3}{4},\ a_{22}=\frac{3}{4},\ a_{31}=-\frac{\omega}{2}-a_{33},\ a_{32}=0,\ \alpha_2=\frac{2}{3},\ \beta_{21}=\alpha_2,$$

$$\alpha_3=0,\ \beta_{31}=-\frac{1}{4a_{33}},\ \beta_{32}=\frac{1}{4a_{33}},\ a_{33}\neq 0. \tag{21}$$

При значеннях коефіцієнтів a_{mi}, α_i, β_{ij}, що визначаються з формул (19) – (21), маємо

$$y(x_{n+1})\cdot Q_{[3,0]}-P_{[3,0]}=\omega h^2F_1+\omega h^3F_2+O(h^4),$$

де

$$Q_{[3,0]}=y_n^3-hfy_n^2+h^2y_n\left\{f^2(1-\omega)-\frac{1}{2}y_nDf\right\}+O(h^3),$$

$$F_1=y_n^2f^2,\quad F_2=y_nf^3, \tag{22}$$

а функція стійкості рівна:

$$S(\lambda h)=\frac{1}{1-\lambda h+(\lambda h)^2\left(\frac{1}{2}-\omega\right)-\frac{1}{6}(\lambda h)^3}. \tag{23}$$

Побудуємо двосторонні формули, використовуючи (2), (3) при $k=1,\ l=2:$

$$y_{n+1}^{[1,2]}=\cfrac{y_n}{1+\cfrac{d_{1,0}}{1+\cfrac{d_{1,1}}{1+d_{1,2}}}}, \tag{24}$$

де

$$d_{1,0}=-\frac{\sigma_1}{y_n},\ d_{1,1}=\frac{\sigma_1^2-y_n\sigma_2}{y_n\sigma_1},\ d_{1,2}=\frac{\sigma_1\sigma_3-\sigma_2}{\sigma_1^2-y_n\sigma_2},$$

$$\sigma_\nu=h\cdot\sum_{i=1}^{\nu}a_{\nu i}k_i,\quad \nu=1,2,3,\quad k_1=f(x_n,y_n), \tag{25}$$

$$k_2=f(x_n+\alpha_2h,y_n+\beta_{21}hk_1),\ k_3=f(x_n+\alpha_3h,y_n+\beta_{31}hk_1+\beta_{32}hk_2).$$

Поклавши $\beta_{ij}=0$ для $i\le j$, а також $a_{11}=1,\ a_{12}=a_{13}=a_{23}=0,\ \alpha_i=\sum_{j=1}^{i-1}\beta_{ij}\ \left(i=\overline{1,3}\right),$ $a_{21}+a_{22}=0,\ a_{31}+a_{32}+a_{33}=0,$ отримаємо

$$y(x_{n+1})\cdot Q_{[1,2]}-P_{[1,2]}=h^2y_n(Df)^2\left[\frac{1}{2}(a_{32}-a_{22})\alpha_2+\frac{1}{2}a_{33}\alpha_3+\right.$$
$$\left.+(a_{22}\alpha_2)^2\right]+h^2f^2Df\left[\frac{1}{2}-(a_{22}+a_{32})\alpha_2-a_{32}\alpha_3\right]+h^3y_nDfD^2f\times$$
$$\times\left\{\frac{1}{6}[(a_{32}+a_{22})\alpha_2+a_{33}\alpha_3]+\frac{1}{2}\left[(a_{32}-a_{22})\frac{\alpha_2^2}{2}+a_{33}\frac{\alpha_3^2}{2}\right]+2a_{22}\alpha_2a_{22}\frac{\alpha_2^2}{2}\right\}+$$
$$+h^3y_n\frac{\partial f}{\partial y}(Df)^2\left\{\frac{1}{6}[(a_{32}-a_{22})\alpha_2+a_{33}\alpha_3]+\frac{1}{2}a_{33}\beta_{32}\alpha_2\right\}+$$
$$+h^3f^2D^2f\left\{\frac{1}{6}-(a_{22}+a_{32})\frac{\alpha_2^2}{2}-a_{33}\frac{\alpha_3^2}{2}\right\}+h^3f^2\frac{\partial f}{\partial y}Df\left\{\frac{1}{6}-a_{33}\beta_{32}\alpha_2\right\}$$
$$+h^3f(Df)^2\left\{-\frac{1}{2}[(a_{22}+a_{32})\alpha_2+a_{33}\alpha_3]+(a_{22}\alpha_2)^2\right\}+O(h^4).$$

Позначивши $\frac{1}{6}-(a_{22}+a_{32})\frac{\alpha_2^2}{2}-a_{33}\frac{\alpha_3^2}{2}=\omega_1,\quad \frac{1}{6}-a_{33}\beta_{32}\alpha_2=\omega_2$ і прирівнявши коефіцієнти при h^2 до нуля, отримаємо $a_{22}\alpha_2=\frac{1}{2},\ a_{32}\alpha_2+a_{33}\alpha_3=0.$

Тоді дістанемо наступну систему:

$$\begin{cases} a_{21}+a_{22}=0,\ a_{31}+a_{32}+a_{33}=0,\ a_{32}\alpha_2+a_{33}\alpha_3=0,\\ a_{22}\alpha_2=\frac{1}{2},\ \frac{1}{6}-(a_{22}+a_{32})\frac{\alpha_2^2}{2}-a_{33}\frac{\alpha_3^2}{2}=\omega_1,\ \frac{1}{6}-a_{33}\beta_{32}\alpha_2=\omega_2.\end{cases}$$

Як видно, ця система повністю співпадає з системою (8), і тому, як параметри a_{mi}, α_i і β_{ij}, можна взяти знайдені раніше набори коефіцієнтів з формул (9) або (10). При $\omega_1=\omega_2=\omega$ і відповідних значеннях a_{mi}, α_i і β_{ij} формула (24) має функцію стійкості:

$$S(\lambda h)=\frac{1+\left(\frac{1}{3}-2\omega\right)\lambda h}{1-\left(\frac{2}{3}+2\omega\right)\lambda h+\left(\frac{1}{6}+2\omega\right)(\lambda h)^2},\quad\left(|\omega|<\frac{1}{12}\right). \qquad (26)$$

Пари формул, що відповідають двом значенням ω, які відрізняються лише знаком, складають формули двостороннього методу, оскільки одна з них дає верхнє, а друга – нижнє наближення до точного розв’язку задачі (1). За найближений розв’язок приймаємо півсуму двосторонніх наближень.

Модульний характер запропонованих методів дає можливість в кожній точці інтегрування отримати кілька наближень до точного розв’язку.

Висновки. Запропоновано двосторонні формули розв’язання задачі Коші для звичайних диференціальних рівнянь. Ці алгоритми дозволяють на кожному кроці інтегрування отримувати не тільки верхні та нижні наближення точного розв’язку, але й інформацію про величину головного члена похибки без додаткових обчислень правої частини вихідного диференціального рівняння.

Література

1. Бейкер Дж., Грейвс- Моррис П. Аппроксимации Паде. Обобщения и приложения. - М. : Мир, 1986. – 502 с.
2. Джоунс У., Трон В. Непрерывные дроби. Аналитическая теория и приложения. -М.: Мир,1985.- 416с.
3. Скоробогатько В.Я. Теория ветвящихся цепных дробей и ее применение в вычислительной математике, - М.: Наука, 1983. – 312 с.

4. Горбунов А.Д., Шахов Ю.А. О приближенном решении задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений с наперед заданным числом верных знаков. I // Журн. вычислит. математики и матем. физики. – 1963. – Т. 3, № 2.- С. 239-253.
5. Пелех Я.М. Про один підхід до знаходження наближених розв'язків задачі Коші для нелінійних диференціальних рівнянь // Укр.матем.журнал. – 1992. – Т. 44. № 12. – С.1695–1701.
6. Ляшко И.И., Макаров В.Л., Скоробогатько А.А. Методы вычислений. – Киев: Вища школа, 1977. – 408 с.
7. Шахов Ю.А. Решение задачи Коши с наперед заданным числом верных знаков для обыкновенного дифференциального уравнения // Вопросы вычислительной математики – Труды ВЦ АН ГрузССР. - Тбилиси.- 1973. – Т. 12. № 1. – С. 105-117.
8. Деккер К., Вервер Я. Усточивость методов Рунге-Кутта для жестких дифференциальных уравнений. – М.: Мир, 1988. – 332 с.

Одержано 14.07.2007 р.

УДК 621.793.927.7

О.Шаблій, докт. фіз.-мат. наук; Ч.Пулька, докт. техн. наук; М.Михайлишин, канд. фіз.-мат. наук

Тернопільський державний технічний університет імені Івана Пулюя

МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ОСТИГАННЯ ДИСКА ПІСЛЯ НАПЛАВЛЕННЯ НАГРІВАЛЬНОЮ СИСТЕМОЮ ІНДУКТОР, ТЕПЛОВИЙ ТА ЕЛЕКТРОМАГНІТНИЙ ЕКРАНИ

Отримано математичну модель для визначення температурного поля остигання диска після його наплавлення за допомогою нагрівальної системи, яка складається з індуктора, теплового та електромагнітного екранів (ІТЕЕ). Запропоновано формули для визначення температури диска в процесі остигання після індукційного наплавлення.

O.Shabliy, Ch.Pulka, M.Mykhailyshyn

MATHEMATICAL MODEL OF COOLING THE DISC AFTER SURFACING BY MEANS OF HEATING SYSTEM INDUCTOR, THERMAL AND ELECTROMAGNETIC SCREENS

The mathematical model to determine the thermal field of cooling the disc being surfaced by means of the heating system consisting of inductor, thermal and electromagnetic screens (ITEMS) is obtained. The formula to determine the disc temperature under cooling after the inductive surfacing is proposed.

В роботі [1] проведені теоретичні дослідження з оптимізації конструктивних параметрів нагрівальної системи, яка складається з індуктора, теплового та електромагнітного екранів (ІТЕЕ) [2], що дозволяє реалізувати енергоощадний режим нагрівання диска [3] з метою одночасного його наплавлення по всій робочій поверхні. Важливою технологічною операцією при індукційному наплавленні є остигання диска після наплавлення нагрівальною системою із забезпеченням в готовому виробі необхідних конструктивних розмірів.

Керуючи способом остигання (примусове, вільне) і його тривалістю, можна регулювати конструктивні розміри (прогини) готових дисків. Дана робота присвячена теоретичному та експериментальному дослідженню процесу остигання диска після наплавлення порошковим твердим сплавом ПГ-С1 (сормайт) на основний метал сталь Ст.3.

Після досягнення необхідної температури наплавлення джерело нагрівання вимикають і диск вільно остигає. На диск у цьому випадку діє тільки тепловий екран, який розміщений біля зовнішнього краю диска $r = r_2$, віднесеного до циліндричної системи координат.